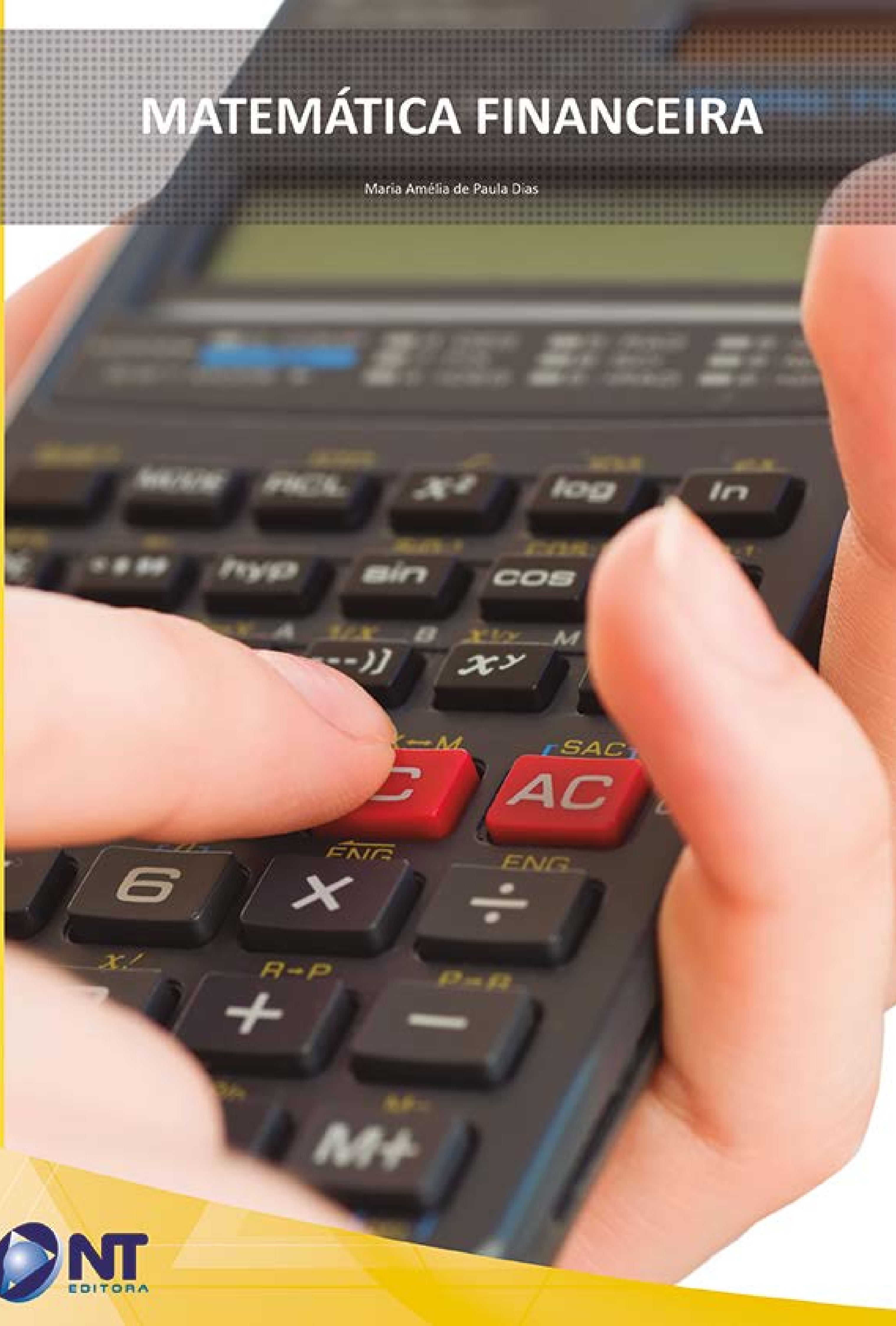
MATEMÁTICA FINANCEIRA

Maria Amélia de Paula Dias

GESTÃO E NEGÓCIOS



NT EDITORA

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Maria Amélia de Paula Dias

GESTÃO E NEGÓCIOS

Autora

Maria Amélia de Paula Dias

Doutora em Desenvolvimento Sustentável pela Universidade de Copenhagen e pela Universidade de Brasília. Mestrado em Administração e graduação em Estatística pela Universidade de Brasília. Atuou como docente na Universidade do Distrito Federal (UDF) e Fundação Getúlio Vargas de por mais de 20 anos, nas áreas de Métodos Quantitativos, Matemática Financeira, Qualidade, Estratégia, Marketing. Trabalhou como consultora no IPTG – Instituto de Pesquisas em Tecnologias Gerenciais nas áreas de Marketing, Qualidade e Estratégia. Atuou por 30 anos no Banco do Brasil, sendo os últimos anos nas Diretorias de Varejo (Pessoas Físicas) e Estratégia e Organização com projetos de segmentação de mercado e CRM. Atualmente trabalha nas linhas de pesquisa de comportamento consciente e processo decisório.

Design Instrucional

Vinicius Abreu

Projeto Gráfico

NT Editora

Revisão

Valesca Fonseca

Capa

NT Editora

Editoração Eletrônica

Kaleo Amorim

Ilustração

Guilherme Gusmão

NT Editora, uma empresa do Grupo NT

SCS Quadra 2 – Bl. C – 4° andar – Ed. Cedro II

CEP 70.302-914 – Brasília – DF

Fone: (61) 3421-9200

sac@grupont.com.br

www.nteditora.com.br e www.grupont.com.br

Dias, Maria Amélia de Paula.

Matemática financeira / Maria Amélia de Paula Dias – 2. ed. – Brasília: NT Editora, 2019.

122 p. il. ; 21,0 X 29,7 cm.

ISBN 978-85-8416-697-8

1. Matemática financeira. 2. Cálculos financeiros.

I. Título

LEGENDA

ÍCONES

Prezado(a) aluno(a),
Ao longo dos seus estudos, você encontrará alguns ícones na coluna lateral do material didático. A presença desses ícones o(a) ajudará a compreender melhor o conteúdo abordado e a fazer os exercícios propostos. Conheça os ícones logo abaixo:

Saiba mais
Esse ícone apontará para informações complementares sobre o assunto que você está estudando. Serão curiosidades, temas afins ou exemplos do cotidiano que o ajudarão a fixar o conteúdo estudado.

Importante
O conteúdo indicado com esse ícone tem bastante importância para seus estudos. Leia com atenção e, tendo dúvida, pergunte ao seu tutor.

Dicas
Esse ícone apresenta dicas de estudo.

Exercícios
Toda vez que você vir o ícone de exercícios, responda às questões propostas.

Exercícios
Ao final das lições, você deverá responder aos exercícios no seu livro.

Bons estudos!

Sumário

APRESENTAÇÃO

Caro(a) estudante,

Seja bem-vindo à **Matemática financeira!**

O conteúdo apresentado começa com conceitos básicos, passa pelas definições de cada tema e finaliza sempre com exercícios. Para a boa compreensão, é necessário ir passo a passo, sem desprezar nenhum ponto, pois o conjunto tem uma sequência lógica e vai do conteúdo mais simples ao mais complexo. Os exercícios são essenciais para a fixação do conteúdo e um aprendizado consistente.

Bons estudos!

Maria Amélia de Paula Dias

Agradecimentos a Vitor Dias Sabaraense pela valiosa colaboração na revisão de todo o texto e dos exercícios.

1 INTRODUÇÃO À MATEMÁTICA FINANCEIRA

Iniciaremos nossos estudos de Matemática Financeira revisando alguns elementos de matemática básica, os quais serão de grande importância para você entender os conceitos e realizar os cálculos sobre este assunto.

Muitas das operações que nós estudaremos podem ser feitas por calculadoras (funções X^y ou Y^x), mas é interessante que você tente resolver os exercícios propostos sem utilizá-las, principalmente para exercitar a compreensão de tais operações. A exceção poderá ser feita para a operação de radiciação. Também apresentaremos alguns termos do universo da matemática financeira que são de extrema importância para quem vai trabalhar nessa área.

Objetivos

Ao finalizar esta lição, você deverá ser capaz de:

- compreender operações de matemática empregadas no estudo da matemática financeira – potenciação, radiciação, razão e proporção, regra de três simples e composta;
- aprender conceitos básicos de matemática financeira.

1.1 Operações matemáticas: potenciação, radiciação, razão e proporção, regra de três simples e composta

Logicamente, a matemática financeira envolve a realização de cálculos, sendo muitos deles estudados na matemática básica. Faremos, então, uma rápida revisão de alguns conceitos e cálculos essenciais para se trabalhar com matemática financeira.

Potenciação

Vamos começar nosso estudo falando da potenciação, que nada mais é do que uma operação matemática que representa multiplicações sucessivas (a multiplicação aqui é representada pela letra x).

Exemplos:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3 (= 8) \qquad 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 (= 16)$$

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots\ldots \times 2}_{\text{20 vezes}} = 2^{20} (= 1.048.576)$$

Nos números que mostramos anteriormente, chamamos de base o número 2 e de expoente, ou potência, os números 3, 4 e 20, respectivamente. Dizemos “2 elevado a 3” ou “2 ao cubo”, “2 elevado a 4”, e “2 elevado a 20” e assim por diante.

A potencialização pode ser definida como a multiplicação de número $\boldsymbol{a \in R}$ (a que pertence ao conjunto dos números reais), por ele mesmo, quantas vezes for seu expoente $\boldsymbol{n \in R}$, ou seja:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots \, a \times}_{\text{"n" vezes}}$$

Exemplos:

$a^1 = a$

$a^2 = a \times a$

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$

$2^1 = 2$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4$

Caso especial

Qualquer número elevado a zero é igual a 1, ou seja: $a^0 = 1$; $130^0 = 1$; $0{,}6430^0 = 1$; $140987365431^0 = 1$; $(-563481)^0 = 1$.

Vamos aprender, agora, algumas especificidades de operações com potências.

1) Quando se multiplica potências de mesma base, conserve a base e some os expoentes.

$$3^2 \times 3^3 = 3^{(2+3)} = 3^5$$

Vamos tirar a prova?

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

$9 \times 27 = 243$

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

2) Para se elevar uma potência a outra potência, mantenha a base e multiplique os expoentes.

$$(2^3)^3 = 2^{(3 \times 3)} = 2^9$$

Tirando a prova:

$(2^3)^3 = (2 \times 2 \times 2)^3 = (8)^3$

$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$

$2^9 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512$

3) Na divisão de potências de mesma base, conserve a base e subtraia os expoentes.

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{(5-2)} = 3^3$$

Tirando a prova:

$3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

$3^2 = 3 \times 3 = 9$

$\frac{3^5}{3^2} = \frac{243}{9} = 27$

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

4) Uma potência negativa pode ser resolvida da seguinte forma:

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2}$$

lembrando que, se $4^1 = 4$, logo

$$4^{-1} = \frac{1}{4}$$

5) Uma potência de uma fração deverá ser resolvida da seguinte forma:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2}$$

Vamos verificar?

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0{,}4^2 = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

$2^2 = 2 \times 2 = 4$

$5^2 = 5 \times 5 = 25$ $\qquad \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$

6) Para multiplicar potências de bases diferentes, mas com o mesmo expoente, multiplique as bases e mantenha o expoente.

$$2^2 \times 5^2 = (2 \times 5)^2 = 10^2$$

Verificando:

$2^2 = 4;\quad 5^2 = 25;\quad 4 \times 25 = 100 \rightarrow 10^2 = 100$

Radiciação

É a operação inversa da potenciação.

Por exemplo: se $4^2 = 16$, a $\sqrt{16}$ é 4 (lemos raiz quadrada de 16).

A operação de radiciação é simbolizada pelo símbolo √. Mas, para sermos exatos, deveríamos sempre colocar o índice da raiz, dessa forma: $\sqrt[2]{16}$, já que podemos ter qualquer número como índice. Calculadoras simples têm as operações com raiz quadrada, mas, talvez, a raiz cúbica (índice 3) ou a raiz quarta (índice 4) não sejam muito comuns. Para resolver essas questões, podemos utilizar a relação da radiciação com a potenciação, o que facilitará a resolução.

Em termos gerais, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[2]{8} = 8^{\frac{1}{2}} \text{ ou } 8^{0,5}$$

$$\sqrt[4]{8} = 8^{\frac{1}{4}} \text{ ou } 8^{0,25}$$

Esses valores podem ser obtidos em calculadoras que tenham a função Y^x ou X^y.

$$8^{0,5} = 2,82 \quad 8^{0,25} = 1,68$$

Razão e proporção

Agora, conheceremos mais dois conceitos importantes: razão e proporção.

Razão: é a relação entre dois valores da mesma grandeza e pode ser expressa das seguintes formas:

- a:b;
- a/b;
- "a" está para "b".

A razão é usada quando queremos comparar grandezas. Suponha, por exemplo, que, na sala A, existam 50 cadeiras e, na sala B, existam 100. A razão entre a quantidade de cadeiras da sala B e da sala A é 100/50, ou:

$$\frac{\textit{cadeiras da sala B}}{\textit{cadeiras da sala A}} = \frac{100}{50} = \textit{simplificando: } \frac{(100 \div 50)}{(50 \div 50)} = \frac{2}{1}$$

Em outras palavras, a sala B tem 2 vezes mais cadeiras que a sala A. Também podemos dizer que cada cadeira na sala A corresponde a 2 na sala B.

Vejamos outro exemplo.

Na sala C, existem 40 cadeiras, mas somente 30 são estofadas. Dessa forma, a razão das cadeiras estofadas para o restante das cadeiras é de 30/40, ou:

$$\frac{\textit{caldeiras estofadas}}{\textit{total de cadeiras}} = \frac{30}{40} = \textit{simplificando: } \frac{(30 \div 10)}{(40 \div 10)} = \frac{3}{4}$$

Considerando essa razão, podemos dizer que, a cada 4 cadeiras na sala C, 3 são estofadas.

Você percebeu que usamos frações na forma simplificada? Quando é possível simplificar, dizemos que essas frações são equivalentes.

$$\frac{100}{50} = \frac{2}{1} \text{ no primeiro caso,} \qquad e \ \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \text{ no segundo caso}$$

Isso nos leva ao estudo das proporções.

Proporção é a igualdade entre duas razões. Os exemplos de frações equivalentes que acabamos de ver, mas também podemos usar outros."

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$$

Lemos essas frações de forma diferente e dizemos, então, que 1 está para 2 assim como 2 está para 4, ou 1 está para 3 assim como 6 está para 18. Genericamente, podemos representar:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Uma propriedade muito importante das proporções é que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \begin{matrix}\text{meios}\\ \text{extremos}\end{matrix}$$

Produto dos meios = produto dos extremos.

$$2 \times 2 = 1 \times 4$$

$$4 = 4$$

Com essa propriedade, podemos, eventualmente, calcular um valor faltante, como:

$$\frac{a}{20} = \frac{30}{40}$$

meios → 30 x 20;
extremos → 40 x a

$40a = 30 \times 20$

$40a = 600$

$a = \dfrac{600}{40}$

$a = 15$

Regra de três simples

Essa é uma regra que nos ajuda a resolver alguns problemas comparando duas razões de forma a constituir uma proporção.

Vejamos um exemplo para facilitar o entendimento.

- Um pedreiro gasta 8 horas para construir uma parede de 1,2 m^2. Se ele quiser construir uma parede de 1,5 m^2, quanto tempo ele vai gastar?

Neste caso, quanto mais metragem de paredes ele quiser construir, mais tempo levará. Dizemos, então, que as duas grandezas são diretamente proporcionais. Nesse sentido, colocamos esses valores em uma tabela para nos ajudar a montar as proporções para a resolução do problema, colocando um X no lugar da informação que queremos saber e representando com setas o sentido do crescimento das duas variáveis. Como elas são diretamente proporcionais, as setas têm o mesmo sentido.

Área (m^2)		Horas de trabalho	
1,2	↓	8	↓
1,5		X	

Podemos montar a proporção, como vimos anteriormente, e resolver o problema, mas não confunda o sinal de multiplicação x com a variável X, certo?

$$\frac{1,2}{1,5} = \frac{8}{X} \rightarrow 1,2X = 8 \times 1,5$$

$$1,2X = 12, \textit{logo } X = \frac{12}{1,2} \rightarrow X = 10$$

Pela propriedade das proporções, resolvemos a questão e descobrimos que o muro de 1,5 m^2 poderá ser construído em 10 horas de trabalho (nas mesmas condições das 8 horas, claro).

Agora, veremos outro caso em que as grandezas se relacionam de forma diferente.

- Um ônibus, a uma velocidade de 80 Km/h, faz um determinado percurso (240 km) em 3 horas. Em quanto tempo ele faria o mesmo percurso se aumentasse a velocidade para 100 km/h?

	Tempo (horas)		velocidade (km/h)
↑	3	↓	80
	X		100

Neste caso, quanto maior a velocidade, menor tempo o ônibus gastará. Nossas setas ficarão em sentido inverso, porque são grandezas inversamente proporcionais. Como resolver esta questão?

Devemos montar a proporção obedecendo as setas, invertendo os termos e obedecendo o sentido de crescimento das variáveis. Assim:

$$\frac{X}{3} = \frac{80}{100} \rightarrow 100X = 3 \times 80$$

Agora, resolvemos normalmente a equação:

$$100X = 240 \rightarrow X = \frac{240}{100} \rightarrow X = 2,4$$

Logo, se, a 80km/h, o ônibus faz o percurso em 3 horas, aumentando a velocidade para 100km/h, ele levará menos tempo, ou seja, 2,4 horas.

Regra de três composta

A regra de três composta é utilizada quando temos um problema que, para ser descrito, envolve três ou mais grandezas.

Assim como na regra de três simples, precisamos identificar se as grandezas são diretamente proporcionais (*dp*) ou inversamente proporcionais (*ip*) para saber como escrever a nossa equação.

Sempre que uma grandeza for inversamente proporcional à incógnita que estamos procurando, inverteremos o denominador e o numerador dessa grandeza na equação.

Vamos modificar o primeiro exemplo, utilizado na regra de três simples, para entender.

Exemplo 1

Um pedreiro gasta 8 horas para construir uma parede de 1,2 m^2. Em quanto tempo ele consegue construir uma parede de 9 m^2?

Resolução:

Vamos colocar em uma tabela as grandezas que estamos estudando – neste caso, a primeira grandeza é "horas de trabalho" e a segunda grandeza é "área". Quando aumentamos as horas de trabalho, também aumentamos a área de parede construída, ou seja, as horas de trabalho são diretamente proporcionais à área de parede construída. Portanto, colocaremos setas no mesmo sentido em ambas as grandezas.

Horas de trabalho	Área (*dp*)
8 ↓	1,2 ↓
X	9

$$1,2 \times X = 8 \times 9$$

$$X = \frac{72}{1,2}$$

$$X = 60 \text{ horas}$$

Exemplo 2

A partir do exemplo dos pedreiros e considerando, agora, dois pedreiros trabalhando juntos, em quanto tempo a parede de 9 m^2 estará erguida?

Resolução:

Neste caso, se aumentarmos a quantidade de pessoas trabalhando, o tempo necessário para construir a mesma área de parede vai diminuir, de forma que podemos falar que a quantidade de pessoas é inversamente proporcional às horas de trabalho. Colocaremos, então, uma seta ao lado da quantidade de pessoas trabalhando no sentido contrário às setas que colocarmos ao lado da área e das horas de trabalho.

Horas de trabalho	Área (*dp*)	Pessoas trabalhando (*ip*)
8 ↓	1,2 ↓	1 ↑
X	9	2

Como a quantidade de pessoas trabalhando é inversamente proporcional ao tempo, precisamos, ao montar a nova equação, inverter os termos da proporção de pessoas trabalhando.

$$\frac{8}{X} = \frac{1,2}{9} \times \frac{2}{1}$$

$$\frac{8}{X} = \frac{1,2 \times 2}{9 \times 1}$$

$$\frac{8}{X} = \frac{2,4}{9}$$

$$2,4 \times X = 8 \times 9$$

$$X = \frac{8 \times 9}{2,4}$$

$$X = \frac{72}{2,4}$$

$$X = 30 \text{ horas}$$

Para determinar se grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, deve-se comparar a influência que uma grandeza terá na outra se a 3ª grandeza permanecer constante. No exemplo, mantendo a área de parede constante, descobrimos que aumentar a quantidade de pedreiros trabalhando fará diminuir as horas totais de trabalho e, então, dizemos que a quantidade de pessoas trabalhando é inversamente proporcional à quantidade de horas totais de trabalho.

O que você acha sobre complicar um pouco o segundo exemplo da seção anterior?

Exemplo 3

Um ônibus, a uma velocidade de 80 Km/h, faz um percurso de 240 km em 3 horas. Em quanto tempo ele faria um percurso de 600 km se aumentasse a velocidade para 100 km/h?

Tempo (horas)	Distância (km) (*dp*)	Velocidade (km/h) (*ip*)
3 ↓	240 ↓	80 ↑
X	600	100

A velocidade do ônibus é inversamente proporcional ao tempo de duração do percurso, ou seja, se a velocidade do ônibus aumentar, a duração do percurso vai ser menor. Logo, precisamos inverter o termo da proporção de velocidade em nossa equação.

$$\frac{3}{X} = \frac{240}{600} \times \frac{100}{80}$$

$$\frac{3}{X} = \frac{240 \times 100}{600 \times 80}$$

$$\frac{3}{X} = \frac{24000}{48000}$$

$$\frac{3}{X} = 0{,}5$$

$$X = \frac{3}{0{,}5}$$

$$X = 6 \text{ horas}$$

Agora, você pode praticar o que aprendeu nestes próximos problemas.

Problema 1

Na próxima viagem, o ônibus estará lotado, então, vai conseguir manter uma velocidade de 65 km/h, mas o trajeto que precisa percorrer agora é de 780 km.

Que duração terá esta viagem?

Tempo (horas)(*dp*)	Distância (km) (*dp*)	Velocidade (km/h) (*ip*)
3	*240*	80
X ↓	780 ↓	*65* ↑

$$\frac{3}{X} = \frac{240}{780} \times \frac{65}{80}$$

$$\frac{3}{X} = \frac{240 \times 65}{780 \times 80}$$

$$\frac{3}{X} = \frac{15600}{62400}$$

$$\frac{3}{X} = 0{,}25$$

$$X = \frac{3}{0{,}25}$$

$$X = 12 \text{ horas}$$

Portanto, a duração que a viagem terá será de 12 horas.

Problema 2

Uma pessoa que mora no campo e trabalha 5 dias por semana em uma cidade próxima percorre 70 km por dia e consome 25 litros de gasolina. Ela recebeu uma oferta de emprego em outra cidade, mais próxima, onde ela precisaria trabalhar 6 dias por semana, totalizando 63 km percorridos por dia, recebendo o mesmo salário.

Sabendo disso, em qual emprego ela gastará menos gasolina ao longo da semana?

O consumo de gasolina é diretamente proporcional à quantidade de dias trabalhados e também é diretamente proporcional à distância percorrida. Perceba, neste exemplo, que, por mais que a distância a cada dia seja menor, no segundo caso, estamos indicando a seta no mesmo sentido que o consumo em litros de gasolina, pois, se a distância cresce, o consumo também cresce, por srem ambos diretamente proporcionais.

Litros de gasolina	Dias trabalhados (*dp*)	Distância por dia (*dp*)
25	5	70
X	6	63

$$\frac{25}{X} = \frac{5}{6} \times \frac{70}{63}$$

$$\frac{25}{X} = \frac{5 \times 70}{6 \times 63}$$

$$\frac{25}{X} = \frac{350}{378}$$

$$25 = \frac{350}{378} \times X$$

$$X = 25 \times \frac{378}{350}$$

$$X = 27 \text{ litros}$$

De acordo com as informações que tivemos, essa pessoa gasta menos gasolina no emprego atual (25 litros) do que gastaria caso aceitasse a oferta de emprego que recebeu (27 litros).

Problema 3

Uma fábrica de canetas possui quatro máquinas que fabricam um total de 28.800 canetas em 8 horas ininterruptas de trabalho a cada dia. A fábrica recebeu uma encomenda de 162.000 canetas para entregar em 5 dias. Porém, uma das máquinas está passando por manutenção e não poderá ser utilizada.

Nesse sentido, quantas horas por dia devem trabalhar as demais máquinas para conseguirem entregar a encomenda contando com 5 dias de produção?

Perceba que, se aumentarmos as horas de produção diárias para uma mesma quantidade de canetas a serem produzidas, podemos diminuir a quantidade de dias necessários para a produção. A quantidade de dias é, portanto, inversamente proporcional ao total de horas de produção por dia.

Da mesma forma, se aumentamos as horas de produção diárias, a quantidade de máquinas necessárias para produzir a mesma quantidade de canetas também diminui. A quantidade de máquinas é, então, inversamente proporcional ao total de horas de produção por dia.

Já se aumentarmos as horas de produção diárias, a quantidade de canetas que será produzida em uma mesma quantidade de dias será aumentada. Dizemos, portanto, que a quantidade de canetas é diretamente proporcional às horas de produção diárias.

Horas de produção	Dias de produção *(ip)*	Máquinas *(ip)*	Quantitade de canetas *(dp)*
8	1	4	28800
X ↓	5 ↑	3 ↑	162000 ↓

$$\frac{8}{X} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{4} \times \frac{28800}{162000}$$

$$\frac{8}{X} = \frac{5 \times 3 \times 28800}{1 \times 4 \times 162000}$$

$$X = \frac{5 \times 3 \times 28800}{1 \times 4 \times 162000} \times 8$$

$$X = 12 \text{ horas}$$

Seriam necessárias, então, 12 horas por dia de trabalho.

Porcentagem

Porcentagem é a tradução de uma grandeza qualquer em relação ao número cem, como o 4% (quatro por cento), que significa 4 unidades em cem. É chamada também de percentual ou razão centesimal. Ela é utilizada, basicamente, para comparar medidas e grandezas diferentes.

De uma forma simples, devemos transformar as grandezas para escala de 100 e compará-las.

A porcentagem é muito utilizada em cálculos financeiros de maneira geral, na construção de números, índices, em taxas de juros e de descontos e como medida de avaliação de variação – crescimentos ou decrescimentos.

Ela é uma fração cujo denominador é 100.

Exemplo: 3/100 é, na verdade 0,03 (3 centésimos) ou 3% (três por cento).

Vejamos alguns exemplos de utilização de porcentagem.

Exemplo 1

Uma pessoa gasta 30% do salário de R$ 1.500,00 em moradia. Quanto ela gasta em termos absolutos?

O todo ou o valor de referência é 1.500 e a parte é 30% de 1.500. Logo, 30% de 1500 é calculado da seguinte maneira:

$$gasto = 30\%\ de\ 1500 \rightarrow \frac{3}{100} \times 1500 \rightarrow 0{,}3 \times 1500 = 450$$

Exemplo 2

De maneira inversa, se uma pessoa recebe R$ 1.500,00 e gasta R$ 450,00 em moradia, quantos por cento do salário é gasto nesta modalidade?

Da mesma maneira, o valor de referência a partir do qual calcularemos a porcentagem continua sendo R$ 1.500,00.

$$\text{porcentagem de gasto} = \frac{450}{1500} = 0{,}3$$

$$0{,}3 \times 100 = 30\%$$

> **Importante**
>
> Para passarmos de porcentagem para um valor absoluto, dividimos o valor por 100. Assim, 4% é o mesmo que 4/100, que é o mesmo que 0,04.
>
> Para passarmos um valor absoluto para porcentagem, fazemos a operação inversa – multiplicamos o valor por 100. Assim, 0,3 é o mesmo que 0,3 * 100= 30%.

Porcentagens maiores que 100

Se uma pessoa compra um carro por R$ 20.000 e o vende por R$ 25.000, qual o ganho percentual em relação ao preço inicial?

Neste caso, o todo ou valor de referência é 20.000 ou 100% do valor. Ao fazermos a conta, vemos:

$$\textit{porcentagem de ganho} = \frac{25000}{20000}\ 1{,}25 \textit{ ou em percentuais} : 125\%$$

O resultado não significa que o ganho foi de 125%, mas, sim, que 25.000 é 125% de 20.000. Para sabermos somente o ganho, temos de diminuir 100 de 125. É como se estivéssemos retirando o valor de referência, ou seja, os 20.000 dos 25.000, e o que sobra é o ganho, isto é, 25%.

Podemos resolver de outra maneira: 25000 é, na verdade, o ganho de 5 mil a mais do preço de compra, ou do preço de referencia. Então, o ganho foi, percentualmente:

Se o preço de venda tivesse sido 18.000, como seria a conta?

Porcentagem = 18.000/20.000=0,9 que, multiplicado por 100, resulta em 90%. Logo, o valor de 18.000 não chegou em 100, o que significa que o preço de venda foi 10% menor que o preço de compra e houve, então, um prejuízo de 10%.

> **Importante**
>
> Em cálculos com porcentagens, precisamos sempre saber qual é o nosso todo ou o valor de referência. Isso ficará mais claro com a utilização da regra de três simples aprendida anteriormente.

Porcentagem com regra de três simples

Já sabemos que a porcentagem é uma fração cujo denominador é sempre 100. Para trabalharmos com a regra de três simples, é mais seguro utilizarmos sempre os valores absolutos, sem percentuais. Por exemplo: sabemos que 100% é o mesmo que 100/100, ou seja, 1.

Então, no primeiro exemplo que vimos, o todo é equivalente a 100%, ou seja, a 1. Nesse sentido, quanto equivale 30% de R$1.500?

$$\frac{450}{1500} = \frac{X}{1}$$

Utilizando a regra de que o produto do meio é igual ao produto dos extremos, temos:

$$1500X = 450x1 \textit{ logo } X = \frac{450}{1500} \text{, portanto } X = 0{,}3$$

Para transformamos em porcentagem, basta multiplicar por 100 (conforme nota 1), o que resulta em 30%.

Também é possível resolver esse problema de forma inversa, como no exemplo 2, mas lembrando que sempre utilizaremos os valores absolutos, ou seja, 0,3 no lugar de 30%:

$$X = 0{,}3 \text{ x } 1500 \rightarrow X = 450$$

Vejamos, agora, o caso com a porcentagem maior que 100.

Se o valor de compra foi R$ 20.000, esse valor corresponde a 100% ou a 1. Sendo o preço de venda = R$ 25.000, o ganho foi de R$ 5.000. Quantos por cento representam esses R$ 5.000?

$$\frac{20000}{5000} = \frac{1}{X} \text{, logo, } 20000X = 5000 \rightarrow X = \frac{5000}{20000} = 0{,}25$$

Dessa forma, para transformarmos em percentual, multiplicamos 0,25 por 100, o que resulta em 25%.

Vamos ver mais um exemplo para finalizar?

Vamos calcular 25% de 125.

Utilizaremos a forma absoluta de 25%, que é 0,25, para os cálculos:

$$\frac{125}{X} = \frac{1}{0{,}25} \text{ logo } X = 0{,}25 \text{ x } 125 \rightarrow X = 6{,}25$$

Exercitando o conhecimento

Calcule o valor referente a 330% de 125.

a) 236.

b) 440.

c) 350,3.

d) 412,5.

Comentário:

Observe o cálculo:

Lembrando que 330% é o mesmo que $\frac{330}{100} = 3,3$

$$\frac{125}{X} = \frac{1}{3,3} \rightarrow X = 3,3 \times 125 \rightarrow X = 412,5$$

Portanto, a resposta correta é a letra "d".

1.2 Matemática financeira: conceitos básicos

Segundo o dicionário Houaiss, dinheiro é um meio de pagamento, na forma de moedas ou cédulas, emitido e controlado pelo governo de cada país.

No nosso dia a dia, também é conhecido como gaita, era, grana, arame, bagarotes, cobre(s), metal, milho, ouro, pataca, nota, tutu e verdinha.

No entanto, aqui, o nosso principal objetivo é conhecermos e sabermos aplicar os conceitos de matemática relativos às operações com dinheiro, assim como sabermos o valor do dinheiro no tempo.

Quando vamos realizar o pagamento de um produto em uma loja, por exemplo, é comum nos depararmos com a pergunta: à vista ou parcelado?

A escolha depende de alguns fatores, quando não se tem muito dinheiro disponível normalmente opta-se pelo parcelamento, porém pessoas que não gostam de prestações preferem pagar à vista.

Mas, financeiramente falando, qual seria a melhor opção?

Para compreendermos, precisamos antes conhecer o vocabulário relacionado ao dinheiro e às operações financeiras mais comuns.

A seguir, listamos os termos mais importantes de se conhecer.

1) **Capital:** qualquer valor monetário que uma pessoa (física ou jurídica) toma emprestado ou investe durante certo tempo, também chamado de principal ou valor presente. Pode ser representado pelas letras maiúsculas C ou VP (valor presente), ou, em inglês, *Present value* (PV).

2) **Capitalização:** procedimento de adicionar o juro ao capital, ou principal.

3) **Aplicadores:** são pessoas físicas ou jurídicas que detêm capital e o investem, ou seja, o emprestam esperando receber alguma remuneração pelo uso do dinheiro.

4) **Tomadores:** pessoas físicas ou jurídicas que tomam capital emprestado sob a promessa de pagamento do principal e mais alguma remuneração pelo uso do dinheiro.

5) **Juro:** é a remuneração do capital empregado (para o aplicador) ou o custo do capital obtido como empréstimo (para o tomador). Normalmente representado pela letra ***J*** (maiúscula). É como um aluguel pago (ou recebido) pelo uso do dinheiro e, portanto, será função do prazo deste aluguel, do valor do recurso alugado e do risco envolvido na transação.

6) **Taxa de juro(s):** é o índice que determina a remuneração de um capital em um determinado período de tempo (dias, meses, anos etc.), representada por i (minúscula). A taxa de juros, representada por i, pode ser descrita na forma percentual e unitária. Exemplo:

- taxa percentual: 23% ao mês ou 23% a.m., 12% ao semestre ou 12% a.s., 6% ao ano ou 6% a.a;
- taxa unitária: 0,23 ao mês, 0,12 ao semestre, 0,06 ao ano.

As taxas unitárias também podem ser descritas como frações:

$$0{,}23 = \frac{23}{100} \qquad 0{,}12 = \frac{12}{100} \qquad 0{,}06 = \frac{6}{100}$$

Importante

Para realizar os cálculos, iremos utilizar a forma unitária.

7) **Taxa de aplicação:** é a taxa de juro que representa a remuneração ou rentabilidade do dinheiro sob o ponto de vista de quem empresta o dinheiro.

8) **Taxa de captação:** é a taxa de juro que representa custo do capital sob o ponto de vista de quem toma emprestado o dinheiro.

9) ***Spread*** – diferença entre a taxa de aplicação e a taxa de captação.

10) **Montante ou valor futuro:** a soma do capital mais os juros relativos a tal capital, pelo período de tempo considerado. Representaremos por ***M*** (maiúscula) ou ***VF*** ou, em inglês, ***FV*** (*Future value*).

11) **Operação financeira:** é uma operação realizada usualmente por dois agentes (um emprestador e um tomador, por exemplo) envolvendo a transferência de valores em dinheiro do agente provedor de recursos para o agente tomador de recursos, o qual transferirá ao provedor algum bem tangível ou a garantia de devolução futura dos recursos, segundo um critério definido em comum acordo entre as partes.

Exercitando o conhecimento

Assinale a alternativa que apresenta o correto conceito de taxa de juros.

a) É o índice mensal de valores de uma compra parcelada.

b) É a determinação de uma porcentagem que reduz o valor de um capital em determinado período de tempo.

c) É o índice que determina a remuneração de um capital em um determinado período de tempo.

d) Nenhuma das alternativas anteriores.

Comentário: se você marcou a letra "b", está correto. De acordo com o que estudamos, é a única opção que descreve corretamente a taxa de juros, podendo ela ser calculada em dias, semanas ou meses.

Resumindo

Nesta lição, você teve a oportunidade de revisar alguns conceitos de matemática básica que são essenciais para realizar operações em matemática financeira, assim como conheceu definições fundamentais para o trabalho com cálculos que envolvem dinheiro.

Veja se você se sente apto a:

- aplicar os elementos básicos necessários para se trabalhar com operações de matemática financeira;
- lembrar conceitos básicos de matemática financeira.

Parabéns, você finalizou esta lição!

Agora responda às questões ao lado.

Exercícios

Questão 1 - Se a proporção entre os alunos do turno noturno e do diurno é de 4 para 3, quantos alunos estudam em cada turno, considerando que o total é de 140 alunos?

a) Noturno são 100 alunos e diurno, 40 alunos.

b) Noturno são 80 alunos e diurno, 60 alunos.

c) Noturno são 60 alunos e diurno, 80 alunos.

d) Noturno são 50 alunos e diurno, 90 alunos.

Questão 2 - A proporção equivalente a 3/5 é:

a) 15/25.

b) 5/3.

c) 0,8.

d) 15/30.

Questão 3 - Se um desenvolvedor produz em 6 horas de trabalho 150 linhas de programação, quantas linhas produzirá em 8 horas?

a) 350.

b) 200.

c) 250.

d) 180.

Questão 4 - Quanto é 50% de 50?

a) 5.

b) 25.

c) 2,5.

d) 5,5.

Questão 5 - Uma diarista recebe R$ 120,00 reais por dia de trabalho. Ela trabalha 2 dias por semana. Sua remuneração deve ser reajustada em 4,1%. Considerando que, em média, ela trabalha 8 dias por mês, qual o será o ganho mensal depois do reajuste? Qual será o valor da diária?

a) O ganho mensal após o reajuste será de 999,36, o valor da diária será de 124,92.

b) O ganho mensal após o reajuste será de 1.000,12, o valor da diária será de 122,50.

c) O ganho mensal após o reajuste será de 983,50, o valor da diária será de 129,60.

d) O ganho mensal após o reajuste será de 993,81, o valor da diária será de 124,92.

Questão 6 - O salário de João é 10% maior que o de José. Se o salário de José for aumentado em 20%, quantos por cento ele receberá a mais que João?

a) 10,1%.

b) 7,70%.

c) 9,09%.

d) 8,15%.

Questão 7 - Um revendedor de roupas aplicou o percentual de 10% de acréscimo no seu estoque para vendê-lo. Se ele vende uma camisa por 35 e um *short* por 20, por quanto ele comprou estas peças?

a) Camisa: R$ 33,50 e short: R$ 20,18.

b) Camisa: R$ 32,90 e short: R$ 15,18.

c) Camisa: R$ 31,80 e short: R$ 18,18.

d) Camisa: R$ 34,55 e short: R$ 24,13.

Questão 8 - O valor monetário que uma pessoa (física ou jurídica) toma emprestado ou investe durante certo tempo é chamado de:

a) montante.

b) juro.

c) capital.

d) taxa de juro.

Questão 9 - O que pode representar tanto a remuneração pelo capital emprestado como o custo do dinheiro?

a) Juro.

b) Capital.

c) Taxa de Juro.

d) Montante.

Questão 10 - Assinale a alternativa que apresenta o correto conceito de capitalização.

a) O procedimento de guardar dinheiro para as necessidades futuras.

b) O ato de emprestar dinheiro a juro.

c) Considerar as necessidades futuras no momento de fazer o orçamento.

d) Procedimento de adicionar juro ao capital, ou principal.